APUNTES

Matemáticas para la Economía I

Unión de Estudiantes de Ciencias Económicas | AECUC3M

Tema 1

Funciones de Variable Real

1.1. La Recta Real

Los números reales se pueden ordenar como los puntos de una recta.

Los enteros positivos $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ que surgen al contar, se llaman números naturales (el cero se puede considerar o no como un número natural, nosotros no lo haremos).

Las operaciones aritméticas de adición y multiplicación se pueden hacer dentro de los números naturales pero la resta y la división nos lleva a introducir los siguientes números:

cero: $3 - 3 = 0$,

negativos: $2 - 6 = -4$,

fracciones: $3 \div 5 = \dfrac{3}{5}$.

Por tanto, podemos clasificar los números de la manera siguiente:

- **Naturales:** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- **Enteros:** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
  el cero junto con los enteros positivos y negativos
- **Racionales:** $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$
- **Irracionales:** son los números reales que no son racionales, como por ejemplo $\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e}$
- **Reales:** $\mathbb{R} = \text{Irracionales} + \text{Racionales}$

Todos estos números aparecen como solución de ecuaciones:
$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$,
$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$,
$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$,
$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$,
$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \rightarrow$ Son los **números Complejos:**
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$.

MÉTODOS DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

La definición de los números naturales es la siguiente:

$1 \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$, también pertenece $n + 1$

Veamos cómo funciona esta definición:
$3 \in \mathbb{N} \Rightarrow 3 + 1 = 4 \in \mathbb{N}$,
$3/2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow 3/2 + 1 = 5/2 \notin \mathbb{N}$.

Esta definición de los números naturales nos introduce el proceso de inducción:

Demostración por inducción

Es una técnica para probar una afirmación realizada sobre cada número natural:

- La afirmación es verdadera para $n = 1$
- Si la afirmación es verdadera para $n \in \mathbb{N}$, entonces también es verdadera para su sucesor: $n + 1 \in \mathbb{N}$

Esto implica que la afirmación es cierta para todo número natural n.

Como ejemplo, podemos probar por inducción que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demostración Directa

La idea es probar la afirmación directamente

Por ejemplo, para demostrar que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$,
sólo tenemos que operar directamente $(a - b)(a + b) = a^2 - ba + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Demostración por contradicción o Reductio ad absurdum

- Queremos probar una hipótesis
- Asumimos lo opuesto a la hipótesis y
- Terminamos con una contradicción
- Concluimos que la hipótesis es verdadera

Como ejemplo, mostraremos que $\sqrt{2}$ es irracional:
$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ fracción irreducible.
$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow a^2 = 2b^2 \rightarrow a^2$ es par $\rightarrow a$ par $\rightarrow a = 2r \rightarrow$
$a^2 = 4r = 2b^2 \rightarrow b^2$ par $\rightarrow b$ par.

Si a y b son pares, entonces $\frac{a}{b}$ no puede ser una fracción irreducible $\rightarrow$ contradicción!
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

DESIGUALDADES, VALOR ABSOLUTO

Propiedades de Orden de $\mathbb{R}$
$a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Sólo una de las siguientes afirmaciones se verifica: $a < b,\ \ a = b,\ \ a > b$
2. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
3. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ para todo número real c
4. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$
   Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Propiedad. Entre dos números reales distintos existen infinitos números racionales e irracionales.

Definición 1.1.1 *El* **Valor Absoluto** *de $x \in \mathbb{R}$ es:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Tenemos la definición alternativa: $|x| = \sqrt{x^2}$.

La idea geométrica del valor absoluto es la de distancia. Por ejemplo, ¿qué puntos están a distancia 3 del 0? La respuesta es $|x| = 3$, es decir $x = \pm 3$.

Definición 1.1.2 *Si $x, y \in \mathbb{R}$ la* **distancia** *entre x e y es*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Propiedades del valor absoluto
$x, y \in \mathbb{R}$

1. $|x| = 0 \iff x = 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$
5. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Intervalos en $\mathbb{R}$

Intervalo abierto: (a, b) son todos los valores de x tal que $a < x < b$.

Intervalo cerrado: $[a, b]$ son todos los valores de x tal que $a \leq x \leq b$.

Intervalo semi-abierto: $[a, b)$ son todos los valores de x tal que $a \leq x < b$.

Intervalo semi-abierto: $(a, b]$ son todos los valores de x tal que $a < x \leq b$.

Intervalo semi-abierto: $[a, \infty)$ son todos los valores de x tal que $a \leq x < \infty$.

Intervalo abierto: (a, ∞) son todos los valores de x tal que $a < x$.

Intervalo semi-abierto: $(-\infty, b]$ son todos los valores de x tal que $x \leq b$.

Intervalo abierto: $(-\infty, b)$ son todos los valores de x tal que $x < b$.

Intervalo abierto: $(-\infty, \infty)$ son todos los valores de x tal que $x \in \mathbb{R}$.

Nota. ∞ no es un número real, indica que el intervalo se extiende sin límite.

Definición 1.1.3 *Sea A un conjunto de números*

- *El* **supremo** *de A es el menor elemento de $\mathbb{R}$ mayor o igual a todos los elementos de A. Es la menor de las cotas superiores.*
- *El* **ínfimo** *de A es el mayor elemento $\mathbb{R}$ menor o igual a todos los elementos de A. Es la mayor de las cotas inferiores.*
- *Si el supremo pertenece a A es también el* **máximo** *de A.*
- *Si el ínfimo pertenece a A es también el* **mínimo** *de A.*

1.2. Funciones elementales

Una función f en los reales es una regla que asigna a cada número x un único número real $f(x)$:

$$x \to y = f(x)$$

x: variable independiente, argumento o entrada.
y: variable dependiente, valor de la función o salida.

Definición 1.2.1 *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto. Una* **función** *f con* **dominio** *D es una regla que asigna un único número real $f(x)$ a cada número x en D.*
D es el **dominio** *de f: $\mathrm{Dom}(f) = D$.*
El conjunto de todos los valores de f forman el **rango** *o la* **imagen** *de f:*
$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D, f(x) = y\}$.

Notación: $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Para visualizar una función es muy útil dibujar su gráfica:

Definición 1.2.2 *Sea f una función con dominio D, el conjunto de puntos $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in D$ forman la* **gráfica** *de f.*

¿Cómo podemos reconocer la gráfica de una función? Podemos dibujar líneas verticales, una curva que corta cada línea vertical como mucho una vez, es la gráfica de una función.

Por ejemplo, $y^2 = x$ tiene dos soluciones $y = \pm\sqrt{x}$, por lo que hay dos cortes con cada línea vertical para $x > 0$, por lo tanto no es la gráfica de una función.

Si dibujamos líneas verticales, podemos observar que el dominio de una función es el conjunto de x_0 que verifican que la línea vertical $x = x_0$ corta la gráfica. De la misma forma, si dibujamos líneas horizontales, podemos visualizar la imagen como el conjunto de y_0 que verifican que la línea horizontal $y = y_0$ corta la gráfica.

Una función se puede definir mediante una fórmula, una gráfica o una descripción.

Definición 1.2.3 *Sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función:*

1. *f es una función* **inyectiva** *si $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$, o, de manera equivalente, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$, esto es, si asigna argumentos distintos a valores distintos.*

2. *$f\colon D \to \mathbb{R}$ se dice* **sobreyectiva** *si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.*
   $f\colon D \to D$ se dice **sobreyectiva** *si $\mathrm{Im}(f) = D$.*

3. *f es una función* **biyectiva** *o* **uno-a-uno** *si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.*

1.3. Límites

Sea $f(x)$ una función definida para todo x cerca de x_0, pero no necesariamente en el propio $x = x_0$, si el valor $f(x)$ de f se aproxima al número L cuando x se aproxima al número x_0, decimos que L **es el límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** x_0.

Veamos el comportamiento de la siguiente función en las proximidades de $x = 5$:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$$

x	2.9	2.9999	2.999999	$\rightarrow 3 \leftarrow$	3.000001	3.0001	3.1
$f(x)$	4.8	4.9998	4.999998	$\rightarrow 5 \leftarrow$	5.000002	5.0002	5.2

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 5$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3} = \frac{(2x-1)(x-3)}{x-3} \underset{x\neq 3}{=} 2x - 1.$$

Definición 1.3.1 (Weierstrass, definición $\epsilon - \delta$) *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a x_0 (excepto posiblemente en x_0) y sea L un número real, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

$$\textit{si } \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nota. Podemos utilizar la definición $\varepsilon - \delta$ para probar que $\lim\limits_{x\to 3}(2x - 1) = 5$.

Nota. Una regla general muy útil es escribir $f(x) = L$ y expresarlo en términos de $x - x_0$ todo lo que podamos, mediante la igualdad $x = (x - x_0) + x_0$.

Nota. En la definición $\varepsilon - \delta$, L y x_0 son números finitos. Tenemos definiciones similares para $x \to \pm\infty$ y también si el valor del límite no es un número finito. También podemos definir **límites laterales:** por la derecha de x_0: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ y por la izquierda de x_0: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Formas Indeterminadas

$$\infty - \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty \cdot 0,\ \frac{0}{0},\ \infty^0,\ 1^\infty,\ 0^0.$$

A menos que lleguemos a una indeterminación, tenemos las siguientes propiedades.

Propiedades

Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existen, para x_0 finito o $\pm\infty$

1. $\lim_{x\to x_0}(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \lim_{x\to x_0} f(x) + c_2 \lim_{x\to x_0} g(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, si $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$
4. Regla del reemplazo: si f y g coinciden para todo x cerca de x_0 (no necesariamente incluyendo a x_0), entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$
5. Regla de la función compuesta: si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to L} h(x) = h(L)$, entonces $\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = h(\lim_{x\to x_0} f(x))$

Límites básicos. Sea x_0 finito

a) $\lim_{x\to x_0} c = c, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} c = c$

b) $\lim_{x\to x_0} x = x_0, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} x = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

c) $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $n \in \mathbb{N}$

d) $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$, ($\forall x_0$ en su dominio)

e) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \to$ funciones trigonométricas en su dominio

Lema 1.3.2 (Lema del Sandwich) *Sea I un intervalo tal que $x_0 \in I$. Sean f, g y h funciones definidas en I, excepto posiblemente en el propio x_0. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$ y, $\forall x \in I$, $x \neq x_0$, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Nota. Podemos utilizar el lema del Sandwich para probar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

1.4. Continuidad

Una función continua es una función para la que, intuitivamente, pequeños cambios en la entrada producen pequeños cambios en la salida

Definición 1.4.1 *Sea f una función definida en $(x_0 - p, x_0 + p)$, $p > 0$*

$$f \text{ se dice } \textbf{continua} \text{ en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nótese que la función debe estar definida en x_0 para poder ser continua en ese punto. Si la función no es continua en x_0 decimos entonces que es **discontinua** en dicho punto:

- $f(x)$ es discontinua en x_0 si $\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ no existe, o} \\ \text{el límite existe pero no es igual a } f(x_0) \end{cases}$

Definición 1.4.2 *Una función $f(x)$ es continua en*

- $\mathbb{R}$, *si es continua en cada punto*
- (a, b), *si es continua en cada punto del intervalo*
- $[a, b]$, *si es continua en (a, b) y*

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x), \quad f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Propiedades básicas
Sean f, g continuas en x_0, entonces las siguientes funciones son continuas en x_0

1. $c_1 f + c_2 g, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2. fg
3. $\dfrac{1}{f}$, si $f(x_0) \neq 0$
4. Función compuesta: si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0

Algunas funciones continuas
Las siguientes funciones son continuas en sus dominios

a) $p(x)$ polinomios, $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ funciones racionales, $\sqrt[n]{x}$

b) funciones trigonométricas: $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\operatorname{arcsen}(x), \ldots$

c) funciones hiperbólicas: $\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x), \ldots$

d) $\exp(x)$ y $\ln(x)$

Teorema 1.4.3 (Teorema del Valor Intermedio) *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ que verifica $f(c) = K$.*

Teorema 1.4.4 (Teorema de Bolzano) *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ que verifica $f(c) = 0$.*

Definición 1.4.5 *Una función f se dice **acotada** si el conjunto de sus valores está acotado. Esto es, si existe un número $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo x en su dominio.*

Teorema 1.4.6 (Teorema del Valor Extremo) *Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo. Es decir, existen unos valores x_m y x_M en $[a, b]$ tal que:*

$$f(x_M) \geq f(x) \geq f(x_m) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Tema 2

Cálculo Diferencial en una variable

2.1. Derivadas

La derivada nos proporciona una manera de calcular la tasa de cambio de una función

Calculamos la velocidad media como la razón entre la distancia recorrida en un intervalo de tiempo h y la longitud del intervalo de tiempo.

$$v_{media} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

este valor es la pendiente m de la recta que pasa a través de los puntos $(t, x(t))$ y $(t+h, x(t+h))$. Si queremos calcular la velocidad en un tiempo t debemos tomar el límite

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{d}{dt} x(t)$$

Definición 2.1.1 *Una función f se dice* **derivable** *en x* $\iff$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe y es un número finito.

Si f es derivable, entonces $f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *es la* **derivada** *de f en x.*

Nota. La función f' existe en los puntos del dominio de f tal que el límite existe y es finito.

Definición 2.1.2 (Def. alternativa)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Recta tangente

La recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $m = f'(x_0)$ es la recta tangente a $f(x)$ en x_0: $y = m(x - x_0) + f(x_0)$.

Propiedades

1. $(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g', \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Teorema 2.1.3 (Regla de la Cadena) *Si g es derivable en x y f lo es en $g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en x, y verifica*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Nota. Con la regla de la cadena podemos demostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Podemos utilizar esta identidad para calcular las derivadas $(\arctan x)'$ y $(\ln x)'$.

Derivadas básicas

1. $c' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x, \qquad (\log x)' = \dfrac{1}{x}$
4. $(\text{sen } x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\text{sen}\, x, \qquad (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
5. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad (\text{arcsen}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(x)' = \cosh, \qquad (\cosh x)' = \text{senh}\, x$

Teorema 2.1.4

$$f \textit{ derivable} \Rightarrow f \textit{ continua}$$

Teorema 2.1.5 (Teorema de Rolle) *Sea f be derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = 0.$$

Teorema 2.1.6 (Teorema del Valor Medio) *Sea f be derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o, equivalentemente $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Teorema 2.1.7 (Regla de L'Hôpital) *Sean f y g funciones derivables en (a, b), excepto posiblemente en el punto $x_0 \in (a, b)$. Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ es la indeterminación $\frac{0}{0}$, entonces*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},}$$

siempre que $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista o sea infinito.

Extensiones

La regla de L'Hôpital se puede aplicar en los casos siguientes:

- Si la indeterminación es $\frac{\infty}{\infty}$ con todos los signos posibles.
- Si el límite es $x_0 \to \pm\infty$
- A los límites laterales

Derivación implícita

Si la ecuación viene dada de manera implícita, $F(x, y) = 0$, hay que derivarla respecto a x y a partir de ahí obtener $\frac{dy}{dx}$.

Derivadas de orden superior

Podemos hallar la derivada de una derivada:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x), \qquad \frac{d^3 f}{dx^3} = f'''(x), \cdots, \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

2.2. Extremos

Definición 2.2.1 *Sea f una función definida en un intervalo I:*

- $f(x_m)$ *es el* **mínimo global** *(o absoluto) de f en I si* $f(x_m) \leq f(x), \ \forall x \in I$
- $f(x_M)$ *es el* **máximo global** *(o absoluto) de f en I si* $f(x_M) \geq f(x), \ \forall x \in I$

Nota. Recordemos que si f es continua, en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, la función siempre alcanza su máximo y mínimo global .

Definición 2.2.2 *Sea f una función definida en un intervalo I, si tenemos un intervalo abierto I_1 conteniendo a x_0*

- $f(x_0)$ *es un* **mínimo local** *de f en I si* $f(x_0) \leq f(x), \ \forall x \in I_1$
- $f(x_0)$ *es un* **máximo local** *(o relativo) de f en I si* $f(x_0) \geq f(x), \ \forall x \in I_1$

Definición 2.2.3 *Sea f una función definida en x_0. f tiene un* **punto crítico** *en x_0 si*

$$f'(x_0) = 0 \ \text{o} \ f'(x_0) \ \text{no existe}$$

Teorema 2.2.4 *Si f tiene un máximo o mínimo local en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.*

Cálculo de extremos globales de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$

1. Halla los puntos críticos de f en (a, b): $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no exista
2. Evalúa f en cada punto crítico de (a, b)
3. Evalúa f en los extremos del intervalo: $f(a)$ y $f(b)$
4. El menor valor es el mínimo global y el mayor, el máximo global

Definición 2.2.5

- *f es una* **función creciente** *en un intervalo I si $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) < f(x_2)$.*
- *f es una* **función decreciente** *en un intervalo I si $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) > f(x_2)$.*

Teorema 2.2.6 *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b)*

1. *Si $f'(x) > 0, \ \forall x \in (a, b)$ entonces f es creciente en $[a, b]$.*
2. *Si $f'(x) < 0, \ \forall x \in (a, b)$ entonces f es decreciente en $[a, b]$.*
3. *Si $f'(x) = 0, \ \forall x \in (a, b)$ entonces f es constante en $[a, b]$.*

Criterio de la primera derivada

	$x < x_0$	$x > x_0$	x_0 (punto crítico)
$f'(x)$	$-$	$+$	mínimo local
	$+$	$-$	máximo local
	$-$	$-$	no extremo local
	$+$	$+$	no extremo local

Definición 2.2.7 *Sea f derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es*

- **convexa** *(cóncava hacia arriba) en I si f' es creciente.*
- **cóncava** *(cóncava hacia abajo) en I si f' es decreciente.*

Teorema 2.2.8 *Sea f una función derivable dos veces en un intervalo abierto I*

- *Si $f''(x) > 0,\ \forall x \in I$, entonces la gráfica de f es convexa en I.*
- *Si $f''(x) < 0,\ \forall x \in I$, entonces la gráfica de f es cóncava en I.*

Definición 2.2.9 *Sea f una función continua en un intervalo abierto I y sea $x_0 \in I$. f tiene un* **punto de inflexión** *en x_0 si la concavidad cambia en x_0 (convexa $\leftrightarrow$ cóncava).*

Teorema 2.2.10 *Si x_0 es un punto de inflexión de f, entonces $f''(x_0) = 0$ o $f''(x_0)$ no existe.*

Teorema 2.2.11 *Sea f una función tal que $f'(x_0) = 0$ y derivable dos veces en un intervalo abierto conteniendo a x_0*

- *si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en x_0.*
- *si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en x_0.*

Si $f''(x_0) = 0$ el criterio no funciona, puede ser cualquier cosa.

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	gráfica
$+$	$-$	creciente, cóncava
$-$	$-$	decreciente, cóncava
$+$	$+$	creciente, convexa
$-$	$+$	decreciente, convexa
0	$+$	mínimo local
0	$-$	máximo local
0	0	?

2.3. Gráficas

1. Dominio

2. Intersección con el eje $x \to f(x) = 0$
   Intersección con el eje $y \to f(0) = y$

3. Simetrías

   $f(-x) = +f(x) \to$ par
   $f(-x) = -f(x) \to$ impar

   Periodicidad $\to f(x+T) = f(x)$

4. Asíntotas:

   Vertical $\to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
   Horizontal $\to \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = H$
   Oblicua $\to \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (mx+b) = 0 \to m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x},\ b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx)$

5. Continuidad: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

6. Derivada: monotonía y puntos críticos

   $f'(x) > 0 \to$ creciente
   $f'(x) < 0 \to$ decreciente
   $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no exista $\to$ **puntos críticos**

7. Máximos y mínimos locales: $x_0 \to$ punto crítico

   $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \quad \to$ mínimo local
   $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \quad \to$ máximo local
   $f'(x) : - \mapsto + \quad \to$ mínimo local
   $f'(x) : + \mapsto - \quad \to$ máximo local

8. Concavidad

   $f''(x) > 0 \to$ convexa
   $f''(x) < 0 \to$ cóncava

9. Puntos de inflexión. La concavidad cambia. $f''(x_0) = 0$ o $\nexists f''(x_0)$

10. Máximos y mínimos globales

2.4. Polinomio de Taylor

La idea es aproximar una función $f(x)$ por un polinomio $P(x)$. El polinomio de Taylor es el polinomio que mejor aproxima a una función en un punto x_0

Si aproximamos $f(x)$ por $\begin{cases} \text{una constante} & \rightarrow P(x) = f(x_0) \\ \text{una recta} & \rightarrow P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{cases}$

Definición 2.4.1 *Si f es derivable n veces en x_0, entonces el polinomio*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

es el **polinomio de Taylor** *de grado n de f centrado en x_0.*

Nota. Para $x_0 = 0$ el polinomio también se llama **Polinomio de Mac Laurin.**

ERROR

El polinomio es una aproximación de $f(x)$, por lo que se comete un **error** $|R_n(x)| = |f(x) - P(x)|$. Existen muchas fórmulas para este error, pero la idea es que todas ellas verifican

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

$\rightarrow$ $R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big)$. Notación: $f(x) = o\big(g(x)\big)$ cuando $x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

En el siguiente teorema tenemos una fórmula para el error $|R_n(x)|$:

Teorema 2.4.2 *Sea $f(x)$ una función derivable $n+1$ veces en un intervalo abierto I, entonces $\forall x_0, x \in I$ tenemos que*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$, ξ es un punto en el intervalo abierto definido por x_0 y x.

Tema 3

Sucesiones y Series

3.1. Sucesiones de números reales

Definición 3.1.1 *Una* **sucesión de números reales** $\{a_n\}$ *es una aplicación que asigna a cada* $n \in \mathbb{N}$ *un número real:*

$$a_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$a_1, a_2, a_3 \dots$ son los términos de la sucesión.
a_n es el término general.
La sucesión también puede empezar en $n = 0$: $a_0, a_1, a_2 \dots$.

Definición 3.1.2 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice* **convergente** *si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, *para* L *finito.*

El **límite** *de una sucesión* $\{a_n\}$ *es* L *si para todo* $\epsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. *(Hay una definición alternativa para* L *infinito.)*

Si la sucesión no es convergente, decimos que es **divergente.**
Las propiedades de los límites de sucesiones son las mismas que las propiedades de los límites de funciones.

Para **hallar el límite** de una sucesión podemos utilizar algunas técnicas como:

- El concepto de límite de una función:

  Sea $f(x)$ una función y $\{a_n\}$ la sucesión $f(n) = a_n$.

  Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

  Podemos utilizar todas las herramientas para calcular el límite de una función, como, por ejemplo, la regla de L'Hôpital.

- El **lema del Sandwich** para sucesiones:

  Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (finita o infinita) y $\{c_n\}$ verifica que

  $$a_n \le c_n \le b_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

  entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Definición 3.1.3 *Una sucesión $\{a_n\}$ se dice:*

1. *acotada superiormente si $\exists\, C \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq C$.*

2. *acotada inferiormente si $\exists\, C \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq C$.*

3. **acotada** *si es acotada superiormente e inferiormente ($\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, t. q. $C_1 \leq a_n \leq C_2$).*

Definición 3.1.4 *Una sucesión $\{a_n\}$ se dice:*

1. *monótona creciente si $a_n < a_{n+1}$ (no decreciente si $a_n \leq a_{n+1}$).*

2. *monótona decreciente si $a_n > a_{n+1}$ (no creciente si $a_n \geq a_{n+1}$).*

3. **monótona***, si es uno de los casos previos.*

Teorema 3.1.5

$$\boxed{\{a_n\} \text{ monótona y acotada} \Rightarrow \{a_n\} \text{ convergente}}$$

Teorema 3.1.6 (Criterio de Stolz) *Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ verifican uno de los siguientes apartados:*

1. *$\{b_n\}$ es monótona creciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$,*

2. *$\{b_n\}$ es monótona decreciente, con $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.*

Siempre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$, exista parar L finito o infinito, entonces

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}}$$

Teorema 3.1.7 (Fórmula de Stirling)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1}$$

3.2. Series de números reales

Una serie es la suma de una sucesión de términos

Por ejemplo → la suma geométrica: $\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{r^{N+1}-1}{r-1}$.

Definición 3.2.1 *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión, una* **serie***(infinita) es la suma de todos sus términos:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots .$$

La **suma parcial** *de* n *términos es* $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n$.
Si la sucesión $\{S_n\}$ *de sumas parciales converge al límite* S*, entonces decimos que la serie*
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge***, y* S *es la suma de la serie:*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots .$$

En otro caso, decimos que la serie **diverge.**

Propiedades

1. $\sum a_n$ y $\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum(c_1a_n + c_2b_n) = c_1\sum a_n + c_2\sum b_n$ conv.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ div.
3. $\sum a_n$ conv $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (Pero $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \nRightarrow \sum a_n$ conv)

Teorema 3.2.2 *La* **suma geométrica** *converge si* $0 < |r| < 1$*, en este caso*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Teorema 3.2.3 *La* **serie telescópica** *(*$a_n = b_n - b_{n+1}$*)*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdots$$

verifica que $S_n = b_1 - b_{n+1}$.
Esta serie converge $\iff \lim_{n\to\infty} b_n < \infty$ *y*

$$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teorema 3.2.4 *La* **p-serie** *(*$p = 1$ *es la serie armónica)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots .$$

1. *converge si* $p > 1$.
2. *diverge si* $0 < p \leq 1$.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA SERIES

1. **Criterio de comparación directa:** $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos

$$0 < a_n \leq b_n, \forall\, n \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \sum b_n \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv} \\ \sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum b_n \text{ div} \end{array}$$

2. **Criterio de comparación en el límite:** $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad L \text{ finito y positivo}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen el mismo comportamiento}$$
ambas convergen o ambas divergen

3. **Criterio de la raíz:** $\{a_n\}$ sucesión de términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ div}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \text{ el criterio no concluye}$$

4. **Criterio del cociente:** $\{a_n\}$ sucesión de términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ div}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \text{ el criterio no concluye}$$

5. **Criterio de Leibniz para series alternadas:**
$\{a_n\}$ sucesión de términos positivos

$$\text{Si } a_{n+1} \leq a_n \text{ y } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$$\Downarrow$$
La serie alternada $\sum(-1)^n a_n$ converge condicionalmente

$$\left(\sum(-1)^{n+1} a_n\right)$$

Definición 3.2.5

AC. $\sum a_n$ *es* **absolutamente convergente** *si* $\sum |a_n|$ *es convergente.*

CC. *Si* $\sum a_n$ *es convergente pero* $\sum |a_n|$ *es divergente, entonces la serie es* **condicionalmente convergente**.

Convergencia absoluta	$\Longrightarrow$	Convergencia condicional
No convergencia condicional	$\Longrightarrow$	No convergencia absoluta

ERROR

Cuando aproximamos la suma de una serie alternada por sus primeros n términos, entonces

$$S = S_N + R_N = \sum_{n=1}^{N} (-1^n) a_n + R_N \quad \Rightarrow \; |R_N| \leq a_{N+1}$$

Nota. Podemos derivar o integrar una serie infinita para obtener otra serie.

3.3. Series de potencias

Definición 3.3.1 *Una* **serie de potencias** *centrada en* x_0 *es una serie infinita de la forma*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots$$

Teorema 3.3.2 (Convergencia de las series de potencias)
Una serie de potencias en x_0 *verifica uno y sólo uno de los siguientes apartados:*

1. *La serie converge sólo en* x_0
2. *Existe un número real* $\rho > 0$ *tal que la serie es*
   - *absolutamente convergente en* $|x - c| < \rho$
   - *divergente en* $|x - c| > \rho$
3. *La serie es absolutamente convergente para todo* $x \in \mathbb{R}$

Nota. ρ es el **radio de convergencia** de la serie de potencias. $\rho = 0$, $\rho < \infty$ ó $\rho = \infty$. El conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie converge es el **intervalo de convergencia** de la serie. El radio se puede obtener mediante las siguientes formulas:

- $\dfrac{1}{\rho} = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- $\dfrac{1}{\rho} = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, si el límite existe

Teorema 3.3.3 *Si la serie de potencias* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *tiene radio de convergencia* $\rho > 0$*, entonces* $f(x)$ *es continua, derivable e integrable en* $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$*. La derivada y la integral se calculan término a término. Ambas tienen el mismo radio de convergencia que* f*. El intervalo de convergencia puede ser diferente, debido al comportamiento en los extremos* $(x = x_0 \pm \rho)$*.*

Propiedades.
Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

1. $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$
2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{Nn}$
3. $c_1 f(x) + c_2 g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) x^n$

Definición 3.3.4 *Si existen todas las derivadas de* f *en* x_0*, entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se llama la **serie de Taylor** *de* f *centrada en* x_0 *(para* $x_0 = 0$ *también se llama la serie de Mac Laurin de* f*).*

Teorema 3.3.5 *Si existen todas las derivadas de* f *en un intervalo abierto* I *que contiene a* x_0 *entonces*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si y solo si existe ξ *entre* x *y* x_0 *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0, \quad \forall\, x \in I.$$

SERIES DE TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdots, \quad -1 \le x \le 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \cdots, \quad -1 < x \le 1$$

Tema 4

Integración

4.1. Primitivas

LA INTEGRAL DEFINIDA

Si $f(x)$ es una función continua y no negativa definida en el intervalo $x \in [a, b]$, entonces la **integral definida**

$$\int_a^b f(x)$$

representa el **área bajo la gráfica** de la función $f(x)$ y sobre el eje x en el intervalo $x \in [a, b]$.

Si $f(x)$ es una función general, la integral definida representa la **suma de áreas con signo** entre la función y el eje x. La idea para calcular la integral definida es dividir el intervalo en n subintervalos y aproximar la función por una constante (el menor o el mayor valor, el valor del punto medio o cualquier valor de la función en el intervalo). Entonces, calculamos el área de n rectángulos, que es mucho más sencillo. Si aproximamos $f \simeq f(x_i)$ en el intervalo i-ésimo, con todos los intervalos de la misma longitud, Δx, entonces podemos aproximar la integral como

$$\int_a^b f(x) \simeq f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

Si aproximamos la función en el intervalo por los siguientes valores, obtenemos los que se llama, para dicha partición del intervalo

El menor valor en cada subintervalo	$\rightarrow$ suma inferior de f
El mayor valor en cada subintervalo	$\rightarrow$ suma superior de f
Cualquier valor en cada subintervalo	$\rightarrow$ suma de Riemann de f

Al tomar el límite $\Delta x \rightarrow 0$ si todas las sumas coinciden, decimos que la función es **integrable Riemann**.

Nota. Cualquier función continua a trozos es integrable.

Tenemos la siguiente definición de integral definida:

Definición 4.1.1 *Dada una función integrable $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, se dividimos el intervalo en n subintervalos de igual longitud Δx, eligiendo cualquier punto $x_i^\star$ en cada subintervalo, entonces se define la integral definida o la integral de Riemann de $f(x)$ de a a b como*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x.$$

Nota. Los métodos numéricos se basan en este concepto de calcular una integral aproximando el valor de la función en cada subintervalo por una constante o por un polinomio, mucho más sencillo de integrar.

Propiedades de la integral

1. $\displaystyle\int_a^b c_1 f + c_2 g = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g$
2. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$
4. $\displaystyle\int_a^a f = 0$
5. $\displaystyle\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g$
6. $\displaystyle f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$
7. $\displaystyle f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

   si $\displaystyle f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f \leq 0$
8. $\displaystyle \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
9. $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow$
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$

LA INTEGRAL INDEFINIDA

Geométricamente, la derivada surge al hallar la pendiente de una curva y la integral al calcular el área bajo una curva, pero Newton descubrió, además, que **derivar e integrar son procesos inversos:**

- **Derivación:** dada una función $F(x)$, halla una función $f(x)$ que satisfaga

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

- **Integración:** dada una función $f(x)$, halla una función $F(x)$ que satisfaga

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Una función $F(x)$ que resuelve el último problema se llama una **primitiva**, **antiderivada** o **integral indefinida** de $f(x)$.
El problema de derivación siempre tiene solución pero el de integración no siempre tiene solución y, en general, suele ser mucho más complicado.

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Aquí veremos la técnicas más comunes para calcular la integral (definida o indefinida) de una función.

Primitivas básicas

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \;\; n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int \operatorname{sen} x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \operatorname{senh} x = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x = \operatorname{senh} x + c$$

Integración mediante cambio de variables o por substitución (CV)

- Integral definida

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

- Integral indefinida

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

al final, hay que deshacer el cambio

Integración por partes (IPP)

- Integral definida

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- Integral indefinida

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Integración de funciones racionales: descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \rightarrow P,\ Q \text{ polinomios.}$$

- Si el grado de $P \geq$ grado de $Q \Rightarrow$ debemos **dividir** los polinomios:
  $P(x) = Q(x)C(x) + R(x) \rightarrow$
  $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx.$$
- $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ con grado$(R(x)) <$ grado$(Q(x))$:

  i) Primero, debemos comprobar que la integral no sea inmediata, es decir, si es del tipo:

  tipo ln $\rightarrow \displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+8}dx = \ln|x^2+3x+8| + c.$

  tipo arctan $\rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8} = \frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\frac{x}{\sqrt{8}} + c.$

  ii) Si no lo es $\rightarrow$ **Haremos descomposición en fracciones simples:**

Factor en el denominador	Término en la descomposición en fracciones simples
$x-b$	$\dfrac{A}{x-b}$
$(x-b)^k$	$\dfrac{A_1}{x-b} + \dfrac{A_2}{(x-b)^2} + \cdots \dfrac{A_k}{(x-b)^k}, \quad k = 1,2,3,\cdots$
$(x-a)^2+b^2$	$\dfrac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$
$\left((x-a)^2+b^2\right)^k$	$\dfrac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2} + \dfrac{A_2x+B_2}{\left((x-a)^2+b^2\right)^2} + \cdots + \dfrac{A_kx+B_k}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}, \quad k = 1,2,3,\cdots$

Para cada factor en el denominador debemos añadir el término correspondiente de la tabla y calcular las incógnitas $(A, B, A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots)$ igualando los denominadores. Después hay que calcular la integral de cada término.

A partir de aquí, $R = \dfrac{P}{Q}$ denota una función racional en sus argumentos, $P,\ Q$ son polinomios.

Funciones irracionales o integrales con raíces

Haremos un cambio de variables para eliminar las raíces.

$$\int R\left[\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1},\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_r/q_r}\right]\to t^m=\frac{ax+b}{cx+d},\ m=\mathrm{mcm}(q_1,\cdots,q_r).$$

mcm$\to$ mínimo común múltiplo.

Integrales de funciones trigonométricas

$\int \operatorname{sen}^{2n}x$, $\int \cos^{2n}x \to$ fórmulas de ángulo doble: $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$

$\int \operatorname{sen}^{2n+1}x=\int \operatorname{sen}^{2n}x\operatorname{sen}x=\int(1-\cos^2 x)^n\operatorname{sen}x$

$\int \cos^{2n+1}x=\int \cos^{2n}x\cos x=\int(1-\operatorname{sen}^2 x)^n\cos x$

$\int \operatorname{sen}mx\cos nx \to$ fórmulas trigonométricas

$$\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\to \begin{array}{ll} R \text{ impar en } \operatorname{sen}x\to & t=\cos x\\ R \text{ impar en } \cos x\to & t=\operatorname{sen}x\\ R \text{ par en } \cos x \text{ y } \operatorname{sen}x\to & t=\tan x\\ \text{Resto de problemas}\to & t=\tan x/2,\\ \left(\operatorname{sen}x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt\right) & \end{array}$$

Algunos cambios de variables

1. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})\to x=a\tan t$
2. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\to x=\frac{a}{\cos t}$
3. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\to x=a\operatorname{sen}t$

4.2. El Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f integrable en [a,b], $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de $f(x)$ definida en $[a, b]$.

Teorema 4.2.1

$$f \text{ integrable en } [a,b] \Rightarrow F \text{ continua en } [a,b]$$

Teorema 4.2.2 (El Teorema Fundamental del Cálculo, TFC)
Sea f integrable en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, definida $\forall x \in [a, b]$.
Si f es continua en $c \in [a, b] \Rightarrow F$ es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Si f es continua $\forall x \in [a, b] \Rightarrow F$ es derivable $\forall x \in [a, b]$ y $F'(x) = f(x)$.

Teorema 4.2.3 (Regla de Barrow) *Sean f y g continuas en $[a, b]$ y g derivable en (a, b), de forma que $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$, entonces*

$$\int_a^b f = \int_a^b g' = g(b) - g(a).$$

Teorema 4.2.4 (TFC generalizado) *Sea $F(x) = \int_a^x f$, con f integrable*

- *Sea $H(x) = F(g(x)) = \int_a^{g(x)} f$, entonces si g es derivable, tenemos que*

$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

- *Sea $H(x) = \int_{l(x)}^{g(x)} f$, entonces si g y l son derivables, tenemos que*

$$H'(x) = f(g(x))g'(x) - f(l(x))l'(x).$$

4.3. Aplicaciones de la Integral

ÁREAS

- Área entre la **gráfica de una función** y el eje x, entre a y b:

$$A = \int_a^b |f| dx$$

- Área entre las **gráficas de dos funciones** f, g, entre a y b:

$$A = \int_a^b |f - g| dx$$

- Área con **ecuaciones paramétricas:** el área entre la gráfica de $x = x(t),\ y = y(t)$ y el eje x entre $t = t_0$ y $t = t_1$ es:

$$A = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \right|$$

- Área en **coordenadas polares:** el área de la gráfica de $r = r(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

VOLÚMENES

- **Volumen por secciones paralelas:** si $A(x)$ es el área de las secciones paralelas a lo largo de toda la longitud de un sólido, el volumen del sólido así definido entre $x = a$ y $x = b$ es

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

- **El método de discos:** el volumen de un sólido de revolución obtenido al rotar $|f(x)|$ alrededor del eje x entre $x = a$ y $x = b$ es

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

- **El método de capas:** el volumen de un sólido de revolución obtenido al rotar $f(x) \geq 0$ alrededor del eje y es

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

LONGITUDES

- La **longitud del arco de curva** $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

- Si la curva viene dada en **forma paramétrica**, la longitud es

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

INTEGRAL IMPROPIA

Definición 4.3.1 *La siguiente integral*

$$\int_a^{\infty} f(x) = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x),$$

se llama una **integral impropia** *de f. Si el límite es finito decimos que la integral* **converge** *en otro caso, diremos que la integral diverge.*

Teorema 4.3.2 (Criterio integral para series) *Consideremos $f \geq 0$ una función monótona decreciente definida en $x \geq 1$. Sea $a_n = f(n)$, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} f(x)\, dx,$$

tienen el mismo comportamiento, o ambas convergen o ambas divergen.